

**Белогрудов Александр Николаевич**

**УГАТУ**

**доцент кафедры специальных глав математики**

**Стереометрия.**

**Часть 3.**

**2016г.**

## Типы рассматриваемых задач:

- стереометрические задачи на доказательство утверждений;
- расчетные задачи.

## Ресурсы:

<http://alexlarin.net/>

<http://reshuege.ru/>

- «ЕГЭ-2016. Математика. Типовые тестовые задания», под ред. И.В. Ященко – М.: «Экзамен», 2016г.

## Вспомогательные теоремы и свойства:

**Теорема (о 3-х перпендикулярах)** Если проекция наклонной, проведенной к плоскости, перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна той же прямой.

**Теорема (обратная о 3-х перпендикулярах)** Если наклонная, проведенная к плоскости, перпендикулярна некоторой прямой, лежащей в плоскости, то и проекция наклонной перпендикулярна той же прямой.

**Теорема (признак перпендикулярности прямой и плоскости)** Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся в плоскости прямым, то она перпендикулярна и самой плоскости.

**Свойство прямой, перпендикулярной плоскости** Прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна каждой прямой, лежащей в этой плоскости.

**Теорема (признак перпендикулярности плоскостей)** Если одна из плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную второй плоскости, то плоскости перпендикулярны.

## Измерение углов:

**Угол между скрещивающимися прямыми** Угол между скрещивающимися прямыми измеряется как угол между одной из прямых и пересекающейся с ней прямой, параллельной второй из скрещивающихся.

**Угол между прямой и плоскостью** Угол между прямой и плоскостью измеряется как угол между самой прямой (как наклонной к плоскости) и проекцией её на эту плоскость.

**Угол между плоскостями** Угол между плоскостями измеряется линейным углом между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными их общей линии пересечения.

**Пример 1. (Типовые тестовые задания, под ред. И.В. Яценко 2016г.)**

Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- а) Докажите, что прямая  $BD_1$  перпендикулярна плоскости  $ACB_1$ .  
б) Найдите угол между плоскостями  $AD_1 C_1$  и  $A_1 D_1 C$ .

(Ответ:  $120^\circ$ )

**Пример 2. (30 вариантов экз. работ. Профильный уровень, под ред. И.В. Яценко. 2016 г.)**

Точка  $E$  – середина ребра  $AA_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

- а) Докажите, что сечение куба плоскостью  $DEB_1$  является ромбом.  
б) Найдите угол между прямыми  $DE$  и  $BD_1$ .

(Ответ:  $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)$ )

### Вспомогательные теоремы

**Свойство параллельных плоскостей при пересечении третьей плоскостью.**

При пересечении двух параллельных плоскостей третья плоскость высекает на них параллельные прямые.

### Задачи на измерение расстояний.

**Пример 3. (30 вариантов типовых тестовых заданий, под ред. И.В. Яценко. 2016 г.)** В пирамиде  $SABC$  известны длины ребер  $AB = AC = SB = SC = 10$ ,  $BC = SA = 12$ . Точка  $K$  – середина ребра  $BC$ .

- а) Докажите, что плоскость  $SAK$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .  
б) Найдите расстояние между прямыми  $SA$  и  $BC$ .

(Ответ:  $2\sqrt{7}$ )

### Измерение расстояний:

**Расстояние от точки до плоскости** Расстояние от точки до плоскости измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость.

**Расстояние от точки до прямой** Расстояние от точки до прямой измеряется длиной перпендикуляра, опущенного из точки на прямую.

**Расстояние между параллельными прямой и плоскостью** Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью измеряется длиной их общего перпендикуляра.

**Расстояние между параллельными плоскостями** Расстояние между плоскостями измеряется длиной их общего перпендикуляра.

**Расстояние между скрещивающимися прямыми** Расстояние между скрещивающимися прямыми измеряется длиной их общего перпендикуляра.

**Пример 4. (Типовые тестовые задания, под ред. И.В. Ященко. 2016 г.)** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с вершиной  $S$ , все ребра которой равны 4, точка  $N$  – середина ребра  $AC$ , точка  $O$  – центр основания пирамиды, точка  $P$  делит отрезок  $SO$  в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая  $NP$  перпендикулярна прямой  $BS$ .

б) Найдите расстояние от точки  $B$  до прямой  $NP$ .

(Ответ: 2)

**Пример 5. (досрочный экз. 2016г., резервный день)** В треугольной пирамиде  $ABCD$  двугранные углы при ребрах  $AD$  и  $BC$  равны.  $AB=BD=DC=AC=5$ .

а) Докажите, что  $AD=BC$ .

б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при  $AD$  и  $BC$  равны  $60^\circ$ .

(Ответ:  $\frac{10\sqrt{15}}{3}$ )

**Пример 6. (досрочный экз. 2016г., основной день)** В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB$  равна 6, а боковое ребро  $AA_1$  равно  $4\sqrt{3}$ . На ребрах  $AB$ ,  $A_1 D_1$  и  $C_1 D_1$  отмечены точки  $M$ ,  $N$  и  $K$  соответственно, причем  $AM = A_1 N = C_1 K = 1$ .

а) Пусть  $L$  - точка пересечения плоскости  $MNK$  с ребром  $BC$ . Докажите, что  $MNKL$  - квадрат

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью  $MNK$ .

(Ответ: 55 кв.ед.)

### Другие задачи

**Пример 7. (alexlarin.net, вар. 139)** В основании пирамиды  $PABCD$  лежит равнобедренная трапеция с острым углом  $45^\circ$ . Боковые грани  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны основанию пирамиды.

а) Докажите, что плоскости  $PAB$  и  $PCD$  перпендикулярны.

б) Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если известно, что  $BC = 6$ ,  $AD = 12$ , а объем пирамиды равен 27.

**Пример 8. (alexlarin.net, вар. 154)** В Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

А) Докажите, что каждая из плоскостей  $BDA_1$  и  $B_1 D_1 C$  перпендикулярна прямой  $AC_1$ .

Б) Найдите объем части куба, заключенной между плоскостями  $BDA_1$  и  $B_1 D_1 C$ , если известно, что отрезок диагонали  $AC_1$ , заключенный между этими плоскостями, имеет длину  $\sqrt{3}$ .